7-2-18

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires Examen Final de Probabilidad y Estadística - 7 de febrero 2018

Apellido y Nombre: ..........................................................................................

| Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4 | Teórico 1 | Teórico 2 | Nota |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**La condición mínima de aprobación es de tres puntos correctos. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**Ejercicio 1** *Una emmpresa asegura que la vida útil media de las lámparas eléctricas que produce es superior a 2500 hs. Para probar esta afirmación se seleccionan 10 de estas lámpmaras y se registraron las siguientes vidas útiles*

*2510 2486 2490 2521 2480 2520 2512 2483 2517 2525*

*suponiendo que la vida útil tiene distribución normal, se puede avalar lo que afirma la empresa utilizando un 5% de significación?*

**Ejercicio 2** *Se ha comprobado que la duración $D$ de ciertos componentes electrónicos sigue una distribución exponencial con media de 8 meses.*

*a) Hallar la duración superada por el 90% de estos componentes.*

*b) La empresa fabricante da la siguiente garantía:*

- *devolución total del importe si el componente dura 6 meses o menos*
- *devolución del 50% del importe si dura entre 6 y 12 meses*
- *sin devolución si el elemento dura 12 meses o mas*

*Si un componente electrónico cuesta 100 dólares, hallar el valor esperado de la devolución por garantía.*

**Ejercicio 3** *El tiempo que tarda un usuario en navegar y completar la solicitud de compra por Internet(conexión) sigue una distribución normal. Se considera una muestra aleatoria de 45 conexiones que arrojó un valor medio de 12 minutos y una desviación standard de 3.7 minutos*

a. *Construir un intervalo de confianza del 99% para la media poblacional del tiempo de conexión.*

b. *Si consideramos $\sigma = 3.7 min$ cuál es la probabilidad de que la estimación de la media muestral difiera del verdadero valor medio de la conexión en más de dos minutos?*

**Ejercicio 4** *Un artículo puede presentar fallas de dos tipos en forma independiente. El número de fallas de cada tipo sigue una distribución de Poisson con parámetros $\lambda_1 = 0.3$ y $\lambda_2 = 0.5$ fallas por $m^2$. Un artículo con más de una falla se considera de baja calidad. El costo de fabricación es de \$15 por artículo y el precio de venta es \$17 para los de baja calidad y \$20 para los de calidad superior. Hallar la ganancia esperada por artículo.*

**Teórico 1** *Sea $X \sim U(a,b)$, hallar $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$, siendo $\mu$ la esperanza de la distribución y $\sigma$ el desvío standard de la misma. Comparar esta probabilidad con la de una distribución normal.*

**Teórico 2** *Explique tres propiedades deseables de un estimador puntual. Sea $X_1, X_2, X_3$ una muestra aleatoria de una distribución con esperanza $\alpha$ y varianza $5^2$. Supongamos que debe usted decidir entre los dos siguientes estimadores:*

$$\widehat{\alpha_1} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \qquad \widehat{\alpha_2} = 0.3X_1 + 0.4X_2 + 0.3X_3$$

PyE Final 7-2-18

① Una empresa asegura que la vida útil media de las lámparas eléctricas es superior a 2500 hs. Para probar esta afirmación se seleccionan 10 de estas lámparas y se registraron las sig vidas útiles:

2510 2486 2490 2521 2480 2520 2512 2483 2517 2525

suponiendo que la vida útil tiene distribución normal, se puede avalar lo que afirma utilizando un 5% de significación?

$\bar{X} = 2504,4$, $n = 10$, $\sigma$ desconocida, $S = 17,61$, $\alpha = 0.05$

$$H_0: \mu = 2500 \quad vs \quad H_1: \mu > 2500$$

$$e_m = \frac{\bar{X} - 2500}{17,61/\sqrt{10}} \sim t_9 \text{ bajo } H_0$$

Rechazo Ho si $t_{obs} > t_{9,0.05}$

$$t_{obs} = \frac{2504,4 - 2500}{17,61/\sqrt{10}} = 0,7901$$

$$t_{9,0.05} = 1,833$$

$t_{obs} < t_{9,0.05}$ ∴ NO rechazo Ho

$\boxed{\text{No hay suficiente evidencia para probar que } \mu > 2500}$

② Se ha comprobado que la duración D de ciertos componentes electrónicos sigue una distribución exponencial con media de 8 meses.

a) Hallar la duración superada por el 90% de estos componentes

X: "duración, en meses, de los componentes electrónicos"

$$E(X) = 8 = \frac{1}{\lambda} \rightarrow X \sim \mathcal{E}(1/8)$$

$$P(X > t) = 0.9 = 1 - P(X \le t) \rightarrow P(X \le t) = 0.10$$

$$P(X \le t) = F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{8}} = 0.10 \rightarrow e^{-\frac{t}{8}} = 0.9$$

$$\ln\left(e^{-\frac{t}{8}}\right) = \ln(0.9)$$

$$\frac{t}{8} = -\ln(0.9)$$

$$t = -\ln(0.9) \times 8$$

$$\boxed{t = 0.84 \text{ meses}}$$

b) La empresa fabricante da la sig. garantía:

- devolución total del importe si el componente dura 6 meses o menos
- devolución del 50% del importe si dura entre 6 y 12 meses
- sin devolución si el elemento dura 12 meses o más

Si un componente electrónico cuesta 100 dólares, hallar el valor esperado de la devolución por garantía

Y: importe de devolución por garantía

$$Y(x) = \begin{cases} 100 & \text{si } 0 \le X < 6 \\ 50 & \text{si } 6 \le X < 12 \\ 0 & \text{si } X \geq 12 \end{cases}$$ Y es v.a. discreta

$$E(Y) = 100\, p(100) + 50\, p(50) + 0 \cdot p(0) =$$

$$= 100\, P(0 \le X < 6) + 50\, P(6 \le X < 12) =$$

$$= 100\, [P(X < 6) - P(X < 0)] + 50\, [P(X < 12) - P(X < 6)] =$$

x continuidad

$$= 100\, [P(X \le 6) - P(X \le 0)] + 50\, [P(X \le 12) - P(X \le 6)] =$$

$$= 100\, (F(6) - F(0)) + 50\, (F(12) - F(6)) =$$

$$= 100\, (1 - e^{-\frac{6}{8}} - \cancel{1} + e^{-\frac{0}{8}}) + 50\, (\cancel{1} - e^{-\frac{12}{8}} - \cancel{1} + e^{-\frac{6}{8}}) =$$

$$= 100 \times 0{,}5276 + 50 \times 0{,}2492 =$$

$$= 52{,}76 + 12{,}46 = 65{,}22 = E(Y) \rightarrow \boxed{E(Y) = 65{,}22}$$

NOTA

PyE Final 7-2-18

(3) El tiempo que tarda un usuario en navegar y completar la solicitud de compra por internet (conexión) sigue una distribución normal. Se considera una muestra aleatoria de 45 conexiones que arrojó un valor medio de 12 minutos y una desviación estándar de 3,7 minutos.

a) Construir un intervalo de confianza del 99% para la media poblacional del tiempo de conexión.

$m = 45$, distr. Normal $\sigma$ desconocida, $\bar{X} = 12$, $S = 3,7$, $\alpha = 0,01$

$$IC_{0,99}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{\underset{m-1}{44},\underset{\frac{\alpha}{2}}{0.005}} \frac{S}{\sqrt{m}} ; \bar{X} + t_{44,0.005} \frac{S}{\sqrt{m}}\right] =$$

tomé $t_{40,0.005}$ xq 44 no está

$$= \left[12 - \frac{2,704 \cdot 3,7}{\sqrt{45}} ; 12 + \frac{2,704 \times 3,7}{\sqrt{45}}\right] = \boxed{[10,51 ; 13,49] = IC_{0,99}(\mu)}$$

b) Si consideramos $\sigma = 3,7$ min. ¿cuál es la prob. de que la estimación de la media muestral difiera del verdadero valor medio de la conexión en más de 2 minutos?

$\bar{X} = 12 \quad \sigma = 3,7 \quad m = 45$

$$P(|\bar{x} - \mu| > 2) = 1 - P(|\bar{x} - \mu| \leq 2) = 1 - P(-2 \leq \bar{X} - \mu \leq 2) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{-2}{3,7/\sqrt{45}} \leq \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{3,7/\sqrt{45}}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{2}{3,7/\sqrt{45}}\right) =$$

$$= 1 - P(-3,6260 \leq Z \leq 3,6260) =$$

$$= 1 - (P(Z \leq 3,6260) - P(Z < -3,6260)) =$$

x continuidad de cont. a.

$$= 1 - P(Z \leq 3,626) + P(Z \leq -3,626) =$$

$$= 1 - 0,99986 + 0,000144 = 0,0003$$

$$\boxed{P(|\bar{x} - \mu| > 2) = 0,0003}$$

4) Un artículo puede presentar fallos de dos tipos en forma independiente. El número de fallos de cada tipo sigue una distribución de Poisson con parámetros $\lambda_1 = 0{,}3$ y $\lambda_2 = 0{,}5$ fallos por $m^2$. Un artículo con más de una falla se considera de baja calidad. El costo de fabricación es de \$15 por artículo y el precio de venta es \$17 para los de baja calidad y \$20 para los de calidad superior. Hallar la ganancia esperada por artículo

$X_i$ = "cantidad de fallas i por metro cuadrado" $i \in [1,2]$

$$X_1 \sim Po(0.3) \qquad X_2 \sim Po(0.5)$$

costo: \$15 , venta: 1) más de 1 falla: 17 → ganancia = 2

2) 0 o 1 falla: 20 → ganancia = 5

Y: "ganancia obtenida al vender un artículo" $R(Y) = \{2, 5\}$

$$E(Y) = 2\,p(2) + 5\,p(5) \qquad , p(2) + p(5) = 1$$

$$p(5) = \underbrace{P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0)}_{0 \text{ fallas}} + \underbrace{P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)}_{1 \text{ falla tipo } 1} + \underbrace{P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1)}_{1 \text{ falla tipo } 2} =$$

$$\overset{indep.}{=} P(X_1=0)\,P(X_2=0) + P(X_1=1)\,P(X_2=0) + P(X_1=0)\,P(X_1=1) =$$

$$\overset{C.A.}{=} e^{-0.3} \cdot e^{-0,5} + 0.3e^{-0.3}\,e^{-0.5} + e^{-0.3}\,0.5\,e^{-0.5} =$$

$$= e^{-0,8} + 0.3\,e^{-0.8} + 0.5\,e^{-0,8} = e^{-0.8}(1 + 0.3 + 0,5) = 1{,}8e^{-0.8} \approx 0.8088 = p(5)$$

C.A: $P(X_1 = 0) = e^{-0.3}\,\dfrac{(0.3)^0}{0!} = e^{-0.3}$

$P(X_1 = 1) = e^{-0.3}\,\dfrac{(0.3)^1}{1!} = 0.3\,e^{-0,3}$

$P(X_2 = 0) = e^{-0.5}\,\dfrac{(0.5)^0}{0!} = e^{-0.5}$

$P(X_2 = 1) = e^{-0.5}\,\dfrac{(0.5)^1}{1!} = 0.5\,e^{-0,5}$

$p(5) = 0.8088$

→ $p(2) = 0{,}1912$

$$E(Y) = 2 \cdot 0.1912 + 5 \cdot 0.8088 = 4{,}4264$$

$$\boxed{E(Y) = 4{,}43}$$

HOJA N°

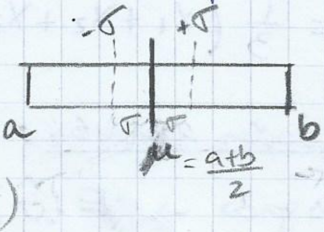
FECHA 7-2-18

# PyE Final

## Teórico 1

Sea $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, hallar $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$, siendo $\mu$ la esperanza de la distribución y $\sigma$ el desvío estándar de la misma. Comparar esta probabilidad con la de una distribución normal

Si $X \sim \mathcal{U}(a,b) \rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2} \longrightarrow$




$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = P(X < \mu+\sigma) - P(X \leq \mu-\sigma)$$

$$\overset{X \text{ continuidad}}{=} P(X \leq \mu+\sigma) - P(X \leq \mu-\sigma) =$$

$$\text{C.A} \quad = F(\mu+\sigma) - F(\mu-\sigma) =$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{6} - \frac{3-\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{3}+\sqrt{3}\cancel{-3}+\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

si $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ $\boxed{P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\approx 0{,}577$

$\boxed{\text{C.A}}$

$$F(\overbrace{\mu+\sigma}^{x}) = \frac{\overbrace{\mu+\sigma}^{x} - a}{b-a} = \frac{\mu - a}{b-a} + \frac{\sigma}{b-a} = \frac{\frac{a+b}{2} - a}{b-a} + \frac{\frac{b-a}{\sqrt{12}}}{b-a} =$$

$$= \frac{\cancel{b-a}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{b-a}} + \frac{\cancel{b-a}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{b-a}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = F(\mu+\sigma)$$

$$F(\mu-\sigma) = \frac{\mu-\sigma-a}{b-a} = \frac{\mu-a}{b-a} - \frac{\sigma}{b-a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} = F(\mu-\sigma)$$

---

Si $X \sim N(\mu,\sigma)$ $\qquad \frac{X-\mu}{\sigma} = Z \sim N(0,1)$

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \overset{X \text{ cont.}}{=} P(X \leq \mu+\sigma) - P(X \leq \mu-\sigma) = P(X-\mu \leq \sigma) - P(X-\mu \leq -\sigma) =$$

$$= P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq 1\Big) - P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq -1\Big) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) =$$

$$= 0.8413 - 0{,}1586 = 0{,}6827$$

si $X \sim N(\mu,\sigma)$ $\boxed{P(\mu+\sigma < X < \mu-\sigma) = 0{,}6827}$

NOTA

Teórico 2 | 1

Explique tres propiedades deseables de un estimador puntual. Sea $X_1, X_2, X_3$ una muestra aleatoria de una distribución con esperanza $\alpha$ y varianza $\beta^2$. Supongamos que debe usted decidir entre los dos siguientes estimadores:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \qquad \hat{\alpha}_2 = 0.3X_1 + 0.4X_2 + 0.3X_3$$

Propiedades deseables:

- insesgado $\rightarrow E(\hat{\theta}) - \theta = 0$
- mínima varianza
- consistente $\rightarrow \hat{\theta} \xrightarrow{n \to \infty} \theta$

Analizo si $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$ son insesgados:

$$E(\hat{\alpha}_1) - \alpha = E\left(\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)\right) - \alpha = \frac{1}{3}E(X_1+X_2+X_3) - \alpha = \frac{1}{3}\left[\overbrace{E(X_1)}^{\alpha} + \overbrace{E(X_2)}^{\alpha} + \overbrace{EX_3}^{\alpha}\right] - \alpha =$$

$$= \frac{1}{3}3\alpha - \alpha = \alpha - \alpha = 0 \rightarrow \boxed{\hat{\alpha}_1 \text{ es insesgado}}$$

$$E(\hat{\alpha}_2) - \alpha = E(0.3X_1 + 0.4X_2 + 0.3X_3) - \alpha = E(0.3X_1) + E(0.4X_2) + E(0.3X_3) - \alpha =$$

$$= 0.3\underbrace{E(X_1)}_{\alpha} + 0.4\underbrace{E(X_2)}_{\alpha} + 0.3\underbrace{E(X_3)}_{\alpha} - \alpha = \alpha\underbrace{(0.3+0.4+0.3)}_{1} - \alpha = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{\alpha}_2 \text{ es insesgado}}$$

Elijo el de menor varianza

$$V(\hat{\alpha}_1) = V\left[\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)\right] = \frac{1}{9}(V(X_1+X_2+X_3)) = \frac{1}{9}\left[\overbrace{V(X_1)}^{\beta^2} + \overbrace{V(X_2)}^{\beta^2} + \overbrace{V(X_3)}^{\beta^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{9}3\beta^2 = \boxed{\frac{\beta^2}{3} = V(\hat{\alpha}_1)}$$

$$V(\hat{\alpha}_2) = V(0.3X_1 + 0.4X_2 + 0.3X_3) = V(0.3X_1) + V(0.4X_2) + V(0.3X_3) =$$

$$= 0.3^2\overbrace{V(X_1)}^{\beta^2} + 0.4^2\overbrace{V(X_2)}^{\beta^2} + 0.3^2\overbrace{V(X_3)}^{\beta^2} = \beta^2\left(\frac{17}{50}\right) \rightarrow \boxed{V(\hat{\alpha}_2) = \frac{17\beta^2}{50}}$$

$$\overset{\sim 0.333}{\frac{1}{3}} < \overset{0.34}{\frac{17}{50}} \quad \therefore \quad V(\hat{\alpha}_1) < V(\hat{\alpha}_2)$$

$\boxed{\text{Decido utilizar } \hat{\alpha}_1}$

0,333

NOTA